

Lineare Gleichungssysteme mit Formvariablen

Beispiele:

- 1 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{R}$. ☐

(I) $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 8$

(II) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$

(III) $3x_1 + 2x_2 + mx_3 = 8$

- 2 Bestimmen Sie den Wert von $a \in \mathbb{R}$ so, dass das System eine eindeutige Lösung hat. ☒

(I) $-ax_1 + (a-2)x_2 = a$

(II) $-x_2 + x_3 = 1$

(III) $2x_1 - x_2 + 3x_3 = a+2$

- 3 Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus den Wert für a , für den das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung hat. (Abitur 2002 BI) ☐

(I) $x_1 - x_2 - x_3 = -4$

(II) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

(III) $x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0$

Lösungen:

1

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 8 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & m & 8 \end{array} \right) \\
 \\
 \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 8 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & 4 & -4 \end{array} \right) \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 16 & 2m-6 & -8 \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 8 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & 4 & -4 \end{array} \right) \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 16m-112 & 0 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

$m = 7$: das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

$m \neq 7$: das lineare Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung

2

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} -a & a-2 & 0 & a \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array} \right)
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{Zeile (I) und (III) tauschen}}
 \begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} -a & a-2 & 0 & a \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-4 & 3a & a^2+4a \end{array} \right)
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -4a+4 & -a^2-5a+4 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Für eine eindeutige Lösung muss gelten: $-4a+4 \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & a & 0 \end{array} \right) \\
 \\
 \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right) \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & a+1 & 4 \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right) \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2a-10 & -34 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung für, wenn $2a-10=0 \Rightarrow a=5$